

고정밀 압축성 유동 해석을 위한 임의의 고차정확도를 갖는 비정렬 불연속 갤러킨-다차원 공간 제한 기법 연구

Multi-dimensional Limiting Process for Arbitrary Higher-order Discontinuous Galerkin Methods for High-fidelity Compressible Flow Analyses

박진석^{1*}, 김종암¹
서울대학교¹

초 록

본 연구에서는 압축성 유동장을 정밀하게 해석하기 위해서 불연속 갤러킨 기법을 위한 강건하고 효율적인 다차원 충격파 포착 기법을 개발하고자 한다. 그동안 본 연구 그룹에서는 유한 체적법을 바탕으로 다차원 물리 유동 특성을 반영한 다차원 공간 제한 기법을 성공적으로 개발하였으며, 이를 바탕으로 고차 내삽에 용이한 불연속 갤러킨 기법으로 확장하고자 한다. 이를 위해서 본 연구에서는 기존에 2 차 정확도의 유한 체적법에서 제안한 MLP 기울기 제한자와 더불어서, 고차 내삽기법에 적합한 MLP 기반 Troubled-cell 표시자를 추가적으로 개발하였다. 이를 결합하여 개발한 DG-MLP 기법의 경우 연속적인 구간에서 높은 정확도를 유지하면서도 매우 강건하고 정확하게 물리적 비선형파를 포착함을 확인할 수 있었다.

ABSTRACT

The present paper deals with the robust and efficient shock capturing strategy for arbitrary higher-order discontinuous Galerkin methods to resolve high speed compressible flow accurately. This approach is a continuous work of extending multi-dimensional limiting process (MLP), which has been successfully developed in finite volume method (FVM), into discontinuous Galerkin Method on unstructured grids. Based on successful analyses and implementations of the MLP slope limiting in FVM, MLP is extendable into DG framework with the MLP-based troubled-cell marker and the hierarchical MLP slope limiting. It is observed that the proposed approach yields outstanding performances in resolving non-compressive as well as compressive flow features.

Key Words : Discontinuous Galerkin Method (불연속 갤러킨 기법), Multi-dimensional Limiting Process (다차원 공간제한 기법), Arbitrary Higher-Order Shock-Capturing Method (고차정확도 충격파 포착 기법)

1. 서 론

다차원 공간 제한 기법(MLP)은 유한체적법(FVM)에 대해서 성공적으로 개발되었다. TVD 또는 ENO-type 과 같은 다른 공간 제한 기법에 비해, MLP 기법은 다차원 공간에서 수치 진동을 효율적으로 제어할 수 있는 장점이 있다. 이론적으로 MLP 공간 제한 기법은 Maximum principle 을 만족하여 L^∞ norm 차원에서 다차원 단조성을 보장할 수 있다. 일련의 연구를 통해서 다양한 비점성 및 점성 유동을 해석시 MLP 기법을 적용한 결과 기존 기법

에 비해서 정확성 및 수렴성 등에서 향상되었음을 확인할 수 있었다⁽¹⁻⁴⁾.

최근들어 불연속 갤러킨 기법(DG)는 복잡한 형상에 쉽게 적용 가능하며 고차 내삽시 적은 인접 격자 정보만 이용하는 장점이 있어, 쌍곡 편미분 방정식을 고차 정확도로 해석하는데 널리 사용되고 있다. 그러나 가장 문제가 되는 부분은 불연속 구간에서 불필요한 수치 진동을 억제할 수 있는 공간 제한 메커니즘이 불완전하다는 점이다. 그동안 FVM 에서 널리 쓰이던 TVB 기반 제한 기법⁽⁵⁾이나 WENO-type 제한 기법^(6,7)을 활용하여 수치 진동을 억제하기 위한 시도가 이루어져 왔으나,

이들 기법은 다차원 유동 해석시 충격파동의 구간에서 수치 진동을 제어하는데 한계가 있었다. 본 연구에서는 이를 해결하기 위해 기존의 FVM 기반 MLP 기법을 DG framework 으로 확장하여 강건하고 정확한 공간 제한 기법을 개발하고자 하였다^(8,9). 본 연구에서는 현재 개발중인 DG-MLP 기법을 2 차원 및 3 차원 비정렬 격자계에 대해 4 차 공간 정확도 (P3 내삽)까지 적용 및 확장하여, 다양한 압축성 유동 해석에 적용하였다. 우선 MLP 기법의 특징을 간단히 소개한 후 DG 로 확장되는 과정에 대해서 다루고자 한다.

2. 다차원 공간 제한 조건

다차원 공간에서 단조성을 보장하기 위해서, MLP 기법에서는 1 차원 단조 조건을 확장한 다차원 공간 제한 기준을 제안하였다. 이 기법의 핵심적인 내용은 격자내 평균값 뿐 아니라 각 꼭지점에서의 물성치 역시 공간 제한이 필요하다는 점이다. 특히 꼭지점에서의 재생성된 분포가 주변 물성치 내에서 제한될 경우 물성치 평균값 역시 단조성을 보장할 것이라는 가정을 전제로 하고 있다. 이러한 MLP 조건은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\bar{q}_{neighbor}^{\min} \leq q_{vtx} \leq \bar{q}_{neighbor}^{\max} \quad (1)$$

여기서 q_{vtx} 는 꼭지점에서 물성치이며, $(\bar{q}_{neighbor}^{\min/\max})$ 는 꼭지점을 공유하는 격자 평균 물성치의 최대/최소이다. MLP 조건은 근본적으로 격자 위상 정보와 관계없이 적용할 수 있다. 효율성과 정확성을 고려하여 q_{vtx} 를 근사화하는 방법에 따라 정렬 및 비정렬 격자계에 적용할 수 있다.

정렬 격자계에서는 꼭지점에서 물성치를 각 방향별 변량의 합으로 계산된다. 이런 점을 고려하여 MLP 기법은 기존의 TVD-MUSCL 기법을 기반으로 다차원 분포를 고려할 수 있는 가변적인 제한자 범위를 도입하여 구현하였다. 구체적인 내용 및 분석은 참고 문헌⁽¹⁾에 기술되어 있다.

비정렬 격자계의 경우, 기저 방향이 존재하지 않으므로 정렬 격자계와 같은 방법으로 구현될 수 없다. 격자 내부 유동 분포를 다음과 같이 다차원 기울기 구배를 이용한 비정렬 격자계 MUSCL 형식의 선형 결합으로 부터 공간 제한자를 설계하였다.

$$q_j(r) = \bar{q}_j + \phi \nabla \bar{q}_j \cdot \mathbf{r}, \quad (2)$$

여기서 q_j 와 ∇q_j 는 각각 격자 T_j 물성치와 그 구배이고, \mathbf{r} 은 격자 중심점에서 부터의 위치 벡터이다. ϕ 는 기울기 제한자이다.

이와 같은 선형 내삽 기법의 경우 격자내 최대/최소 분포가 항상 격자 꼭지점에서 발생하며, 각 꼭지점에서 물성치는 MLP 조건에 의해 제한된다. 이를 바탕으로 다차원 단조성을 만족할 수 있는 MLP 기울기 제한자의 범위는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$0 \leq \phi \leq \max \left(\frac{\bar{q}_{neighbor}^{\min} - \bar{q}}{\nabla \bar{q} \cdot \mathbf{r}_{vertex}}, \frac{\bar{q}_{neighbor}^{\max} - \bar{q}}{\nabla \bar{q} \cdot \mathbf{r}_{vertex}} \right) \quad (3)$$

이를 만족하기 위해 MLP-u 기울기 제한자는 다음과 같이 구현할 수 있다.

$$\phi_{MLP} = \min_{\forall v_i \in T_j} \begin{cases} \Phi(r_{v_i,j}^{\max}) & \text{if } \nabla q \cdot \mathbf{r}_{v_i} > 0 \\ \Phi(r_{v_i,j}^{\min}) & \text{if } \nabla q \cdot \mathbf{r}_{v_i} < 0 \\ 1 & \text{if } q_i = q_A \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $r_{v_i,j}^{\min \text{ or } \max}$ 는 허용 가능한 변량 대비 예측한 변량이다. Maximum principle 을 만족하도록 $\Phi(r)$ 을 결정할 수 있으며, 선행 연구를 통해서 MLP-u1 / u2 기울기 제한자를 제안한 바가 있다.⁽²⁻⁴⁾

이러한 MLP 조건은 이론적으로 Maximum principle 을 만족하여 다차원 공간에서 단조성이 보장됨을 보일 수 있다. 기존 기법과 비교하여, MLP 조건은 인접하는 주변 격자 정보를 충분히 이용한다. 그 결과 MLP 기법은 다차원 물리 유동 분포를 포착할 수 있으며, 기존 기법에 비해 정확성을 향상시켰다. 또한 MLP 조건은 LED (Local Extrema Diminishing) 조건⁽¹⁰⁾을 다차원 공간에서 만족하며, L^∞ 안정성을 보장한다.

3. 비정렬 불연속 갤러킨 방법을 위한

MLP 제한 기법

3.1. 불연속 갤러킨 기법

다차원 쌍곡 편미분 방정식은 불연속 갤러킨 기법에 따라 다음과 같이 차분될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{T_j} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \mathbf{W} dV + \int_{\partial T_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \mathbf{W} dS \\ - \int_{T_j} \mathbf{F} \nabla \mathbf{W} dV = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{Q} 는 물성치 벡터이고, \mathbf{F} 는 Flux 벡터 그리고 \mathbf{W} 는 실험함수 벡터이다. \mathbf{n} 은 격자 바깥 방향으로 방향 벡터이다.

DG 기법의 경우, 격자 내부의 분포를 형상 함수의 선형 결합으로 나타내며, 이 함수는 k 차 정확도를 갖는 다항함수 공간 V 에서 표시된다. 또한 실험 함수 역시 같은 공간으로 근사화된다.

$$\mathbf{Q}_j^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_j^{(i)}(t) b_j^{(i)}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

여기서 \mathbf{Q}_j^h 는 격자 T_j 에서 근사화된 물성치 벡터이고, $b_j^{(i)}$ 는 형상함수이다. DG-MLP 기법의 경우 형상 함수에 관계 없이 적용할 수 있으나, 본 연구에서는 계산 효율성을 위해 직교 형상 함수를 사용하였다.

적절한 수치 Flux 를 이용할 경우, 함수 공간 V 로 근사화된 지배방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{T_j} \frac{\partial \mathbf{Q}_j^h}{\partial t} \mathbf{B}_j dV + \int_{\partial T_j} \mathbf{H}(\mathbf{Q}_{jk}^h, \mathbf{Q}_{kj}^h) \cdot \mathbf{n} \mathbf{B}_j dS \\ - \int_{T_j} \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j^h) \nabla \mathbf{B}_j dV = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 \mathbf{Q}_{jk}^h 는 격자 T_j 에서 주변 격자 T_k 방향으로의 경계면에서의 물성치이다. $\mathbf{H}(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_R)$ 은 수치 Flux 함수 벡터이고, \mathbf{B}_j 는 기저 함수 벡터이다. 경계 및 영역에서는 Gauss Quadrature 법을

이용하여 각각 $2p$, $2p+1$ 까지의 정확도를 갖도록 적용하였다.

불연속 갤러킨 기법의 경우 유한체적법과 다르게, 인접 격자 정보만으로도 매우 높은 정확도를 유지할 수 있는 장점이 있다. 그러나, 불연속 갤러킨 기법만으로는 쌍곡 편미분 방정식을 해석하는데 있어서 안정성 측면에서 문제가 있다. 이를 보완하기 위해 본 연구에서는 기본적으로 RKDG 기법을 바탕으로 연구를 진행하였다. 이 기법은 안정적인 수치 적분법과 강건한 공간 제한 기법을 통해 안정성을 확보하고자 하는데, 본 연구에서는 공간 제한기법을 향상시키고자 하였다. 시간 적분 기법으로는 3 차 정확도의 TVD Runge-Kutta 기법과 5 단 4 차 정확도의 SSP-RK(5,4) 기법⁽¹¹⁾을 적용하였다.

3.2. DG-MLP 기법

효율적으로 고차 정확도의 계산을 위해서는 troubled-cell 에 대해서 선택적으로 제한자가 적용되어야 한다. 이런 점에서 정교한 공간 제한 기법과 더불어서 정확한 troubled-cell 구분자는 불연속 갤러킨 기법을 이용한 고정밀 계산을 하는데 있어서 매우 중요하다.

기존에 유한체적법에서는 MLP 조건을 이용하여 Maximum principle 을 위배하는 셀을 찾고 이 셀에 대해 공간제한 기법을 적용하였다. 이때 셀 내부를 선형 분포로 가정하였기 때문에 셀 격자점에서 분포를 제한함으로써 셀 경계에서의 값 역시 제한할 수 있었다. 그러나 셀 내부를 선형 이상의 고차 정확도로 내삽하는 경우 이러한 기준을 바로 적용하는데 한계가 있다. 고차 다항식 근사화된 셀에 대해 MLP 조건만으로는 troubled-cell 을 모두 포착하는데 한계가 있다. 이를 보완하기 위해서 아래와 같이 강화된 조건을 제안하였다.^(8,9)

$$\begin{aligned} \bar{q}_{v_i}^{\min} \leq q_{v_i}^{h, \min} \leq q_{v_i}^h, \\ q_{v_i}^h \leq q_{v_i}^{h, \max} \leq \bar{q}_{v_i}^{\max} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $q_{v_i}^h$ 는 격자 v_i 에서 내삽된 해이고, $(\bar{q}_{v_i}^{\min}, \bar{q}_{v_i}^{\max})$ 는 격자 v_i 를 공유하는 물성치의 최대, 최소값이다. 격자 주위 분포가 이 조건을 위배하는 경우 그 격자를 공유하는 모두를 제한 기법이 필요한 격자를 Troubled-cell 로 판별한다.

이 조건 적용시 clipping 현상으로 극점 주위에서 정확성이 저해할 우려가 있다. 이를 해결하기 위해서 국부적인 극점을 포착하는 요소가 추가적으로 필요하다. MLP stencil 을 고려한 가장 간단한 형태는 다음과 같다.

$$\Delta \bar{q}_{v_i} = \bar{q}_{v_i}^{\max} - \bar{q}_{v_i}^{\min} \leq K \Delta x^2, \quad (9)$$

여기서 K 는 유동 현상에 따라 결정되는 계수이며, 본 계산에서는 K 를 1 에서 100 사이의 값을 사용하였다.

식 (9), (10)를 통해서 개발한 MLP-based troubled-cell Marker 과 MLP 기울기 제한자를 이용하면 다음과 같이 MLP 기법을 불연속 갤러킨 기법으로 확장할 수 있다. 우선 개발한 troubled-cell Marker 를 이용하여 유동 변화가 적은 영역에서는 고차 정확도를 갖는 DG 내삽법을 사용하고 유동 변화가 심한 구간에서는 MLP 기울기 제한자를 적용하여 다차원 수치 진동을 제어하였다. 이 기법을 DG-MLP-1 이라 하였으며, P2 내삽 기법까지 적용할 수 있었다.

그러나 앞서 제안한 DG-MLP-1 기법의 경우 각 유동 현상에 따른 최적의 K 값을 찾기 어려우며, 이 값은 내삽 기법의 정확도에 따라 최적값이 달라지는 문제가 있다. 이를 해결하기 위해서 본 연구에서는 격자내 분포를 다음과 같이 선형 구간과 고차 정확도 구간으로 분리하였다.

$$q_{v_i,k}^{h,Pn} = \bar{q}_k + (L_{v_i,k} - \bar{q}_k) + (q_{v_i,k}^{h,Pn} - L_{v_i,k}) \quad (10)$$

여기서 $q_{v_i,k}^{h,Pn}$ 은 격자 T_k 에서 꼭지점 v_i 로 Pn 내삽 기법을 적용한 결과이다. $L_{v_i,k}$ 은 Pn 내삽 함수를 선형 함수 공간으로 투영한 결과이다. 직교 기저 함수를 사용할 경우 $L_{v_i,k} = q_{v_i,k}^{h,P1}$ 이다. 매끄럽게 유동이 변하는 구간에서 극점에서는 다음과 같은 추측이 가능하다.

Local Maximum

$$L_{v_i,k} - \bar{q}_k > 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} - L_{v_i,k} < 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} > \bar{q}_{v_i}^{\min} \quad (11)$$

Local Minimum

$$L_{v_i,k} - \bar{q}_k < 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} - L_{v_i,k} > 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} < \bar{q}_{v_i}^{\max}$$

식 (8)과 식 (11)을 이용하여 새로운 MLP-based Troubled-cell Marker 를 제안할 수 있다. 이를 최고차 내삽 기법에서 계층적으로 적용하여, 선형 구간까지 공간 제한 기법이 필요한 경우 MLP-u 기울기 제한자를 적용하였으며, 이를 DG-MLP-II 라 하였다. 이 기법은 3 차 정확도 이상의 P2 내삽 기법 이상에서 적용이 가능하다.

4. 수치 실험 결과

다양한 수치 실험을 통해서 제안한 DG-MLP 기법의 특징을 확인하였다. 2 차원 삼각형 요소 및 3 차원 사면체 요소에 대해서 4 차 정확도 내삽 기법까지 적용하였다. P1 내삽기법에 대해서는 DG-MLP-u1, P2 이상에 대해서는 DG-MLP-II 기법을 적용하였다. 수치 flux 기법으로는 Local Lax-Friedrich 기법, RoeM 기법⁽¹²⁾ 과 AUSMPW+ 기법⁽¹³⁾ 을 적용하였다. 효율적인 계산을 위해서 METIS library⁽¹⁴⁾ 를 이용한 격자 분할 및 MPI 병렬 기법을 적용하였다.

4.1. 등엔트로피 와류 전파 문제

충격파가 없는 영역에서 수치 기법의 정확성을 파악하기 위하여, 비점성 유동장에서 등엔트로피 와류의 전파 유동을 해석하였다. 이 경우 mean flow 에 따라 와류가 그 형상을 유지하면서 이동하는 완전해를 갖는다. mean flow 는 $\rho_\infty = 1, p_\infty = 1, (u_\infty, v_\infty) = (1, 1)$ 그리고 이다. 여기에 다음과 같은 등엔트로피 와류를 가진하였다.

$$\begin{aligned} (\delta u, \delta v) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{0.5(1-r^2)} (-\bar{y}, \bar{x}), \\ \delta T &= -\frac{(\gamma-1)\varepsilon^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2}, \\ \delta S &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

와류 강도는 $\varepsilon = 5$ 이고, $(\bar{x}, \bar{y}) = (x - x_0, y - y_0)$ 이고 는 와류 중심 그리고 이다. 계산 영역은 $[-5, 5] \times [-5, 5]$ 이고 반복 경계 조건을 주었다.

Table 1. Grid refinement test at $t=2.0$.

	Grid	L_∞	Order	L_1	Order
MLP-u1 on	10x10x2	796E-2		603E-2	
	20x20x2	1.19E-2	2.06	1.45E-2	2.05
	40x40x2	5.29E-3	1.85	3.30E-3	2.14
DG-p1	80x80x2	1.41E-3	1.91	7.64E-4	2.11
MLP-u1 on	10x10x2	1.44E-2		6.04E-2	
	20x20x2	2.05E-3	2.81	1.19E-3	3.07
	40x40x2	2.71E-4	2.92	1.23E-4	3.27
DG-p2	80x80x2	3.44E-5	2.98	1.36E-5	3.17
MLP-u1 on	10x10x2	3.21E-3		1.95E-3	
	20x20x2	2.27E-4	3.82	1.14E-4	4.09
	40x40x2	1.72E-5	3.72	6.02E-6	4.25
DG-p3	80x80x2	1.06E-6	4.02	3.48E-7	4.11

Table 1 은 격자 조밀도에 따른 기법들의 오차를 비교 분석하였다. Extrema detector 가 성공적으로 작동한 결과 불연속 갤러킨 기법이 갖는 정확도를 유지하고 있음을 확인할 수 있다.

4.2. Double Mach Reflection 문제

이 문제는 수치 기법의 고해상도를 파악하는데 있어서 널리 알려진 benchmark 문제이다. 계산 영역은 문제의 물리적인 구성과 동일하게, 30 기울기의 빗면이 있는 관 내부이며, 의 강한 이동 충격파가 부딪치면서 생기는 복잡한 물리 현상을 해석하였다. Lax-Friedrich flux 기법을 사용하였으며, 까지 계산을 수행하였다.

Fig. 1 은 삼각형 요소의 길이가 $h=1/300$ 인 격자계에서 밀도 분포를 유한체적법과 불연속 갤러킨 기법으로 비교한 결과이다. MLP 공간 제한 기법을 적용한 결과 유한체적법 및 불연속 갤러킨 기법 모두 다차원 수치 진동을 성공적으로 제어하였다. 그러나 유한 체적법 결과와 비교하였을 때, DG-MLP 기법을 적용한 경우 Mach stem 주위의 shear layer 에서 유동을 훨씬 정밀하게 포착함을 확인할 수 있었다.

4.2. 3 차원폭팔 문제

다차원 공간에서 충격파 등의 불연속 구간에서 수치 기법의 안정성을 파악하기 위해서 1 차원 충격파와 관 문제를 구면 불연속 구간으로 확장하였다. 대칭성을 고려하여 구의 1/8 형상만 해석하였으며 초기 조건의 다음과 같다.

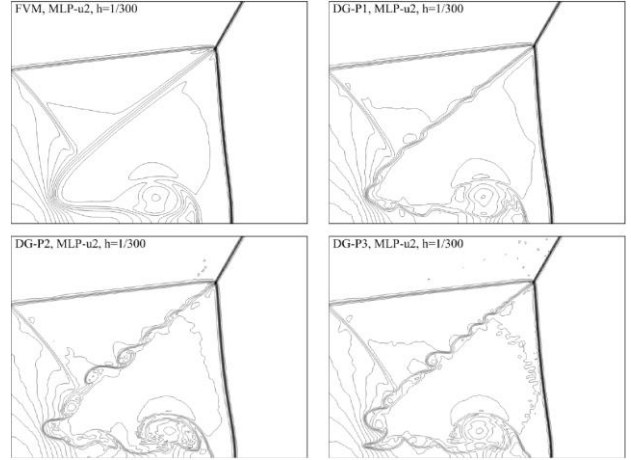


Fig. 1. Comparison of density contours around the region of the double Mach stem

$$\begin{aligned}
 (\rho_L, u_L, v_L, w_L, p_L) &= (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0) \\
 (\rho_R, u_R, v_R, w_R, p_R) &= (0.125, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1)
 \end{aligned}
 \quad (13)$$

격자는 사면체 요소의 크기가 $h=1/50$ 으로 393,300 개로 구성되어 있다. Fig. 2 는 밀도 대각 방향으로 밀도 분포를 $t=0.25$ 일 때 나타낸 결과이다. 구면 대칭성을 고려한 1 차원 Euler 방정식으로 10,000 개의 격자 결과, 유한체적법 및 불연속 갤러킨 기법 해석 결과를 비교하였는데, DG-MLP 기법이 단조성을 보장하면서도 충격파 구조를 정확하게 포착함을 확인할 수 있었다.

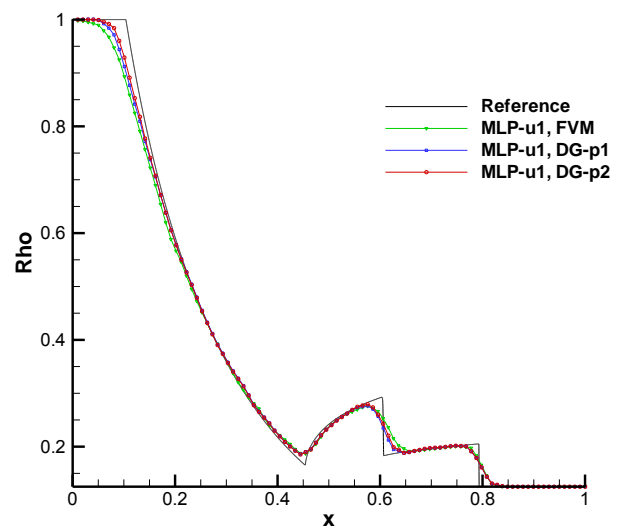


Fig. 2. Density Distribution along the Diagonal

5. 결 론

본 연구를 통해서 MLP 기법을 불연속 갤러킨 기법으로 확장, 구현하여 비정렬 격자계에 대해 고차 공간 정확도를 갖는 강건하고 효율적인 수치 알고리즘을 개발하였다. 특히 4 차 정확도를 갖는 P3 내삽 기법 대해서도 성공적으로 확장하였다. 개발한 기법은 복잡한 다차원 물리 유동 특징을 불필요한 수치 진동을 야기하지 않으면서 정확하게 포착할 수 있다. 2 차원 및 3 차원 공간에서 수행한 다양한 수치 실험을 통해서 개발된 기법이 갖는 다차원 단조성 만족, 향상된 정확성 및 효율성 등의 여러 장점을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 2011 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 국가수리과학연구소의 주요사업 (No. A21001), 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 우주기초원천기술개발 사업(NSL, National Space Lab, 과제번호 20100028975), 국토해양부 건설기술혁신사업 초장대교량사업단(08 기술혁신 E01) 지원으로부터 지원받아 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Kim, K. H. and Kim, C., 2005, "Accurate, Efficient and Monotonic Numerical Methods for Multi-dimensional Compressible Flow Part II: Multi-dimensional Limiting Process," *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 570~615.
- (2) Park, J. S., Yoon, S. H. and Kim, C., 2010, "Multi-dimensional Limiting Process for Hyperbolic Conservation Laws on Unstructured Grids," *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, pp. 788~812.
- (3) Park, J. S. and Kim, C., 2009, "Multi-dimensional Limiting Process on Triangular and Tetrahedral Meshes," *Proc. of 19th AIAA CFD Conference*, AIAA 2009-3938.
- (4) Park, J. S. and Kim, C., 2011, "Multi-dimensional Limiting Process for Finite Volume Methods on Unstructured Grids," *To be appeared in the special issue of Computers and Fluids (Proceedings of ICCFD6)*
- (5) Cockburn, B. and Shu, C.-W., 1998, "The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V: Multi-dimensional Systems," *Journal of Computational Physics*, Vol. 141, pp. 199~224.
- (6) Zhu, J., Qiu J., C.-W. Shu and Dumbser, M., 2008, "Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method Using WENO Limiter II: Unstructured Meshes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4330~4353.
- (7) Zhu, J. and Qiu J., 2009, "Hermite WENO Schemes and their Application as Limiter for Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method III: Unstructured Meshes," *Journal of Scientific Computing*, Vol. 39, pp. 293~321.
- (8) Park, J. S. and Kim, C., 2010, "Multi-dimensional Limiting Process for Discontinuous Galerkin Methods on Unstructured Grids," *Computational Fluid Dynamics 2010: Proc. of ICCFD6*, Springer Verlag, pp. 179 ~ 184.
- (9) Park, J. S. and Kim, C., 2011, "Higher-order Discontinuous Galerkin-MLP Methods on Triangular and Tetrahedral Grids," *Proc. of 20th AIAA CFD Conference*, AIAA 2011-3059.
- (10) Jameson, A., 1995, "Analysis and Design of Numerical Scheme for Gas Dynamics, 1: Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 4, pp. 171~218.
- (11) Spireri, R. and Ruuth, S. J., 2001, "A New Class of Optimal High-order Strong Stability Preserving Time Discretization Methods," *SIAM Journal of Numerical Analyses*, Vol. 40, pp. 469~491.
- (12) Kim, S.S., Kim, C., Rho, O.-H. and Hong, S.K., 2003 "Cures for the Shock Instability: Development of a Shock-Stable Roe Scheme," *Journal of Computational Physics*, Vol. 185, pp. 342~374.
- (13) Kim, K. H., Kim, C., and Rho, O.-H., 2001, "Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme". *Journal of Computational Physics*, Vol. 174, pp. 38~ 80.
- (14) Karypis, G. and Kumar, V., 1998, "Multilevelk-way partitioning scheme for irregular graphs". *Journal of Parallel Distribution Computing*, Vol. 48, pp. 96~129.